Análisis Complejo: 3.1 Funciones Armónicas

Presentaciones de clase

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

Objetivos: 8/Enero/2007

Objetivos

1. Entender el concepto de función armónica y conocer ejemplos.

Objetivos: 8/Enero/2007

Objetivos

1. Entender el concepto de función armónica y conocer ejemplos.
2. Entender el problema de Dirichlet. Resolver el problema de Dirichlet en el disco unidad: conocer el núcleo de Poisson y la representación de funciones armónicas vía el núcleo de Poisson.

Objetivos: 8/Enero/2007

Objetivos

1. Entender el concepto de función armónica y conocer ejemplos.
2. Entender el problema de Dirichlet. Resolver el problema de Dirichlet en el disco unidad: conocer el núcleo de Poisson y la representación de funciones armónicas vía el núcleo de Poisson.
3. Caracterizar las funciones armónicas como las que son localmente la parte real de una función holomorfa (o vía la propiedad de la media).

Objetivos: 8/Enero/2007

Objetivos

1. Entender el concepto de función armónica y conocer ejemplos.
2. Entender el problema de Dirichlet. Resolver el problema de Dirichlet en el disco unidad: conocer el núcleo de Poisson y la representación de funciones armónicas vía el núcleo de Poisson.
3. Caracterizar las funciones armónicas como las que son localmente la parte real de una función holomorfa (o vía la propiedad de la media).
4. Caracterizar los abiertos simplemente conexos utilizando propiedades de las funciones armónicas.

Definición y ejemplos de funciones armónicas

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por $C^2(\Omega)$ el espacio de las funciones reales de clase C^2 en Ω y $\triangle : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definido para $u \in C^2(\Omega)$ por

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_{11} u + D_{22} u.$$

Definición y ejemplos de funciones armónicas

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por $C^2(\Omega)$ el espacio de las funciones reales de clase C^2 en Ω y $\triangle : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definido para $u \in C^2(\Omega)$ por

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_{11} u + D_{22} u.$$

Definición

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es armónica cuando $\triangle u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

Definición y ejemplos de funciones armónicas

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por $C^2(\Omega)$ el espacio de las funciones reales de clase C^2 en Ω y $\triangle : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definido para $u \in C^2(\Omega)$ por

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_{11}u + D_{22}u.$$

Definición

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es armónica cuando $\triangle u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

1. Denotamos por $A(\Omega)$ el conjunto de las funciones armónicas en Ω: es fácil comprobar que $A(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Definición y ejemplos de funciones armónicas

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por $C^2(\Omega)$ el espacio de las funciones reales de clase C^2 en Ω y $\triangle : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ definido para $u \in C^2(\Omega)$ por

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = D_{11} u + D_{22} u.$$

Definición

Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^2, definida en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, se dice que es armónica cuando $\triangle u(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

1. Denotamos por $A(\Omega)$ el conjunto de las funciones armónicas en Ω: es fácil comprobar que $A(\Omega)$ es un espacio vectorial.
2. Las funciones armónicas de dos variables reales aparecen frecuentemente en la Física.

Ejemplos de funciones armónicas

Proposición

Si la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω entonces $u = \mathrm{Re}\, f$ y $v = \mathrm{Im}\, f$ son funciones armónicas en Ω.

Ejemplos de funciones armónicas

Proposición

Si la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω entonces $u = \mathrm{Re}\, f$ y $v = \mathrm{Im}\, f$ son funciones armónicas en Ω.

Definición

Dada una función armónica $u \in A(\Omega)$, si existe otra función armónica $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω se dice que v es una función *armónica conjugada* de u en Ω.

Ejemplos de funciones armónicas

Proposición

Si la función $f = u + iv$ es holomorfa en Ω entonces $u = \mathrm{Re}\, f$ y $v = \mathrm{Im}\, f$ son funciones armónicas en Ω.

Definición

Dada una función armónica $u \in A(\Omega)$, si existe otra función armónica $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω se dice que v es una función *armónica conjugada* de u en Ω.

Proposición

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo y $v_1, v_2 \in A(\Omega)$ son funciones armónicas conjugadas de $u \in A(\Omega)$ entonces $v_1 - v_2$ es constante.

Ejemplos

1. Las funciones armónicas más sencillas son las funciones de la forma $u(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ejemplos

1. Las funciones armónicas más sencillas son las funciones de la forma $u(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Las funciones de la forma $u(re^{i\theta}) = r^n \cos n\theta$ son armónicas $\mathbb{C}$.

Ejemplos

1. Las funciones armónicas más sencillas son las funciones de la forma $u(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Las funciones de la forma $u(re^{i\theta}) = r^n \cos n\theta$ son armónicas $\mathbb{C}$.
3. Si $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n + ib_n|}} = R > 0$, entonces la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\rho^n,$$

define una función armónica en $D(0, R)$.

Ejemplos

1. Las funciones armónicas más sencillas son las funciones de la forma $u(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Las funciones de la forma $u(re^{i\theta}) = r^n \cos n\theta$ son armónicas $\mathbb{C}$.
3. Si $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n + ib_n|}} = R > 0$, entonces la serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\rho^n,$$

define una función armónica en $D(0, R)$.

4. La función $\log |z|$ es armónica en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no posee función armónica conjugada en este abierto.

Ejemplos

1. Las funciones armónicas más sencillas son las funciones de la forma $u(x,y) = ax + by + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Las funciones de la forma $u(re^{i\theta}) = r^n \cos n\theta$ son armónicas $\mathbb{C}$.
3. Si $\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n + ib_n|}} = R > 0$, entonces la serie trigonométrica
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\rho^n,$$
define una función armónica en $D(0,R)$.
4. La función $\log|z|$ es armónica en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no posee función armónica conjugada en este abierto.

Para estudiar la existencia de función armónica conjugada de una función armónica $u \in A(\Omega)$ utilizaremos la forma diferencial

$$d^*u = -u_y dx + u_x dy$$

llamada diferencial conjugada de u.

Existencia de armónicas conjugadas

Proposición

Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ se cumple:

i) $\partial u = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ es holomorfa en Ω.

ii) La forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es cerrada en Ω.

Existencia de armónicas conjugadas

Proposición

Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ se cumple:

i) $\partial u = \frac{1}{2}(u_x - iu_y)$ es holomorfa en Ω.

ii) La forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es cerrada en Ω.

Proposición

Para una función armónica $u \in A(\Omega)$ son equivalentes:

i) La forma diferencial $d^*u = -u_y dx + u_x dy$ es exacta en Ω.

ii) En Ω existe una función armónica conjugada de u, i.e., existe $v \in A(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es holomorfa en Ω.

Cuando se cumplen estas condiciones, cada primitiva v de d^*u es una función armónica conjugada de u en Ω.

Armónicas conjugadas y composición de armónicas

Corolario

Toda función armónica en un disco $u \in A(D(z_0, r))$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)ds \text{ con } \; x_0 = \operatorname{Re} z_0, \; y_0 = \operatorname{Im} z_0.$$

Armónicas conjugadas y composición de armónicas

Corolario

Toda función armónica en un disco $u \in A(D(z_0, r))$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)ds \text{ con } \ x_0 = \operatorname{Re} z_0, \ y_0 = \operatorname{Im} z_0.$$

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces, u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función holomorfa.

Armónicas conjugadas y composición de armónicas

Corolario

Toda función armónica en un disco $u \in A(D(z_0, r))$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)ds \text{ con } \ x_0 = \operatorname{Re} z_0, \ y_0 = \operatorname{Im} z_0.$$

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces, u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función holomorfa.

Corolario

Las funciones armónicas son de clase C^∞.

Armónicas conjugadas y composición de armónicas

Corolario

Toda función armónica en un disco $u \in A(D(z_0, r))$, posee función armónica conjugada, dada explícitamente mediante la fórmula

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x,t)dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s,y_0)ds \text{ con } \ x_0 = \mathrm{Re}\, z_0, \ y_0 = \mathrm{Im}\, z_0.$$

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces, u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función holomorfa.

Corolario

Las funciones armónicas son de clase C^∞.

Corolario

La composición de una función holomorfa con una función armónica es una función armónica: si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ son abiertos, $f \in \mathscr{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $g \in A(\Omega_2)$ entonces $g \circ f \in A(\Omega_1)$.

Teorema

Para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

a) Ω es simplemente conexo.

b) Toda función armónica $u \in A(\Omega)$ posee función armónica conjugada, i.e., existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $u = \mathrm{Re}\, f$.

Teorema

Para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, son equivalentes:

a) Ω es simplemente conexo.

b) Toda función armónica $u \in A(\Omega)$ posee función armónica conjugada, i.e., existe $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $u = \operatorname{Re} f$.

A tener en cuenta...

Obsérvese que si $u \in A(\Omega)$, para cada disco $D(a,R) \subset \Omega$ se tiene que $u|_{D(a,R)}$ es la parte real de una función holomorfa en $D(a,R)$.

Principio del máximo para funciones armónicas

Proposición

Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media.

Principio del máximo para funciones armónicas

Proposición

Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media.

Principio del máximo para funciones armónicas

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

Principio del máximo para funciones armónicas

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

Principio del máximo para funciones armónicas

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

El resultado anterior es caso particular del ya demostrado que sigue debajo

Principio del máximo para funciones subarmónicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica.

Principio del máximo para funciones armónicas

Principio del máximo para funciones armónicas

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z \to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

El resultado anterior es caso particular del ya demostrado que sigue debajo

Principio del máximo para funciones subarmónicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

Principio del máximo para funciones armónicas

Principio del máximo para funciones armónicas

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z\to a} u(z) \leq 0$ para todo $a \in \partial_\infty \Omega$ entonces $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \Omega$. Además, o bien $u(z) < 0$ para todo $z \in \Omega$, o bien $u \equiv 0$.

El resultado anterior es caso particular del ya demostrado que sigue debajo

Principio del máximo para funciones subarmónicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica.

i) Si u alcanza un máximo absoluto en Ω, entonces u es constante.

ii) Si $\limsup_{z\to a} u(z) \leq c$, para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entones o bien $u(z) < c$ para cada $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para cada $z \in \Omega$.

Proposición

Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, entonces $u = v$.

Principio del máximo para funciones armónicas

Proposición

Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, entonces $u = v$.

Para las funciones armónicas no es válido un principio de identidad similar al de las funciones holomorfas, i.e., : la función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se anula sobre $M = \{z : |z| = 1\}$ pero no es idénticamente nula.

Principio del máximo para funciones armónicas

Proposición

Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, entonces $u = v$.

Para las funciones armónicas no es válido un principio de identidad similar al de las funciones holomorfas, i.e., : la función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se anula sobre $M = \{z : |z| = 1\}$ pero no es idénticamente nula.

Corolario

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si u alcanza un máximo relativo en Ω, entonces u es constante.

Principio del máximo para funciones armónicas

Proposición

Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, entonces $u = v$.

Para las funciones armónicas no es válido un principio de identidad similar al de las funciones holomorfas, i.e., : la función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se anula sobre $M = \{z : |z| = 1\}$ pero no es idénticamente nula.

Corolario

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si u alcanza un máximo relativo en Ω, entonces u es constante.

En el resultado anterior se puede cambiar máximo por mínimo.

Principio del máximo para funciones armónicas

Proposición

Sean $u, v \in A(\Omega)$ funciones armónicas en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $u|_{D(a,r)} = v|_{D(a,r)}$ para algún disco $D(a,r) \subset \Omega$, $r > 0$, entonces $u = v$.

Para las funciones armónicas no es válido un principio de identidad similar al de las funciones holomorfas, i.e., : la función $u(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se anula sobre $M = \{z : |z| = 1\}$ pero no es idénticamente nula.

Corolario

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si u alcanza un máximo relativo en Ω, entonces u es constante.

En el resultado anterior se puede cambiar máximo por mínimo.

Corolario

Sea $u \in A(\Omega)$ armónica y no constante en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces u es abierta.

Corolario

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo acotado y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es continua y tiene la propiedad de la media en Ω (en particular si $u \in A(\Omega)$) entonces

$$\sup\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \sup\{u(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

Principios del máximo

Corolario

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo acotado y $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es continua y tiene la propiedad de la media en Ω (en particular si $u \in A(\Omega)$) entonces

$$\sup\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \sup\{u(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

Corolario

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo acotado y $u, v : \overline{\Omega}^{\mathbb{C}_\infty} \to \mathbb{R}$ son continuas y tienen la propiedad de la media en Ω (en particular si $u, v \in A(\Omega)$) y $u|_{\partial_\infty\Omega} = v|_{\partial_\infty\Omega}$ entonces $u = v$.

El problema de Dirichlet

Dado un abierto conexo y una función continua $\varphi : \partial_\infty\Omega \to \mathbb{R}$, el problema de Dirichlet para la región Ω con la condición de frontera φ consiste en encontrar, si existe una función continua $u : \overline{\Omega}^\infty \to \mathbb{R}$ tal que:

- $u|_\Omega$ es armónica;
- $u|_{\partial_\infty\Omega} = \varphi$.

El problema de Dirichlet

Dado un abierto conexo y una función continua $\varphi : \partial_\infty \Omega \to \mathbb{R}$, el problema de Dirichlet para la región Ω con la condición de frontera φ consiste en encontrar, si existe una función continua $u : \overline{\Omega}^\infty \to \mathbb{R}$ tal que:

- $u|_\Omega$ es armónica;
- $u|_{\partial_\infty \Omega} = \varphi$.

Unicidad de la solución

El ultimo corolario proporciona la unicidad de la solución del problema de Dirichlet.

Solución al problema de Dirichlet

Teorema

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z \in D(0,1)$ se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})K(e^{it},z)dt,$$

donde $K(w,z) = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2}$, $|w| = 1$ y $|z| < 1$ (K núcleo de Poisson).

Solución al problema de Dirichlet

Teorema

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z \in D(0,1)$ se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z) dt,$$

donde $K(w,z) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w-z|^2}$, $|w| = 1$ y $|z| < 1$ (K núcleo de Poisson).

$K(e^{it}, re^{i\alpha}) = \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\alpha}|^2} = \frac{1-r^2}{|1 - re^{i(\alpha - t)}|^2}$, para $z = re^{i\alpha}$, $0 \le r < 1$.

Solución al problema de Dirichlet

Teorema

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z \in D(0,1)$ se verifica:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})K(e^{it},z)dt,$$

donde $K(w,z) = \frac{|w|^2-|z|^2}{|w-z|^2}$, $|w| = 1$ y $|z| < 1$ (K núcleo de Poisson).

$K(e^{it},re^{i\alpha}) = \frac{1-r^2}{|e^{it}-re^{i\alpha}|^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i(\alpha-t)}|^2}$, para $z = re^{i\alpha}$, $0 \leq r < 1$.

Corolario

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{D(0,1)}$ es armónica, para cada $z = re^{i\alpha} \in D(0,1)$ se verifica:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})P_r(\alpha-t)dt, \text{ con } 0 \leq r < 1$$

donde $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$ (P núcleo de Poisson)

Núcleo de Poisson

El núcleo de Poisson también viene dado por las fórmulas

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \operatorname{Re}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) && (1) \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. && (2) \end{aligned}$$

Núcleo de Poisson

El núcleo de Poisson también viene dado por las fórmulas

$$\begin{aligned} P_r(\theta) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right) = \mathrm{Re}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right) && (1) \\ &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in\theta}. && (2) \end{aligned}$$

Proposición

El núcleo de Poisson $P_r(\theta)$ tiene las siguientes propiedades:

i) $0 \le P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta+2\pi)$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$

iii) $0 \le P_r(\theta) \le P_r(\delta)$ si $0 < \delta \le |\theta| \le \pi$.

iv) Para $0 < \delta < \pi$, $\lim_{r\to 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en $\delta \le |\theta| \le \pi$.

Proposición

Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ es continua sobre la circunferencia $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$ y para cada $z = \in D(0,1)$ se define

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}dt$$

se obtiene una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(D(0,1))$. Su parte real $u = \operatorname{Re} f$ que es armónica en $D(0,1)$, viene dada por la integral:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it})P_r(\alpha - t)dt, \text{ donde } z = re^{i\alpha}$$

Solución al Problema de Dirichlet

Teorema: solución al Problema de Dirichlet

Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbb{R}$ es continua sobre la circunferencia $\mathbf{T} = \{z : |z| = 1\}$, existe una única función continua $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$u|_{\mathbf{T}} = \varphi; \quad u|_{D(0,1)} \text{ es armónica}$$

que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) P_r(\alpha - t)\,dt, \text{ donde } z = re^{i\alpha}$$

Corolario

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es continua y $u|_{D(0,1)}$ es armónica entonces $u|_{D(0,1)}$ es la parte real de la función holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \quad z \in D(0,1)$$

Consecuencias de la solución al Problema de Dirichlet

Corolario

Si $u : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{R}$ es continua y $u|_{D(0,1)}$ es armónica entonces $u|_{D(0,1)}$ es la parte real de la función holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \quad z \in D(0,1)$$

Corolario: Fórmula de Schwarz

Para una función holomorfa $g = u + iv$ en un abierto $\Omega \supset \overline{D(0,1)}$ se verifica:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt + iv(0); \quad z \in D(0,1)$$

Consecuencias de la solución al Problema de Dirichlet

Teorema: solución al Problema de Dirichlet en $D(a,R)$

Si $\varphi : \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\} \to \mathbb{R}$ es continua, existe una única función continua $u : \overline{D(a,R)} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$u\big|_{\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=R\}} = \varphi; \quad u\big|_{D(a,R)} \text{ es armónica}$$

que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(a+re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+Re^{it})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-t)+r^2}\,dt; \quad 0 \le r < R$$

Consecuencias de la solución al Problema de Dirichlet

Teorema: solución al Problema de Dirichlet en $D(a,R)$

Si $\varphi : \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\} \to \mathbb{R}$ es continua, existe una única función continua $u : \overline{D(a,R)} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$u|_{\{z\in\mathbb{C}:|z-a|=R\}} = \varphi; \quad u|_{D(a,R)} \text{ es armónica}$$

que viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(a+re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+Re^{it})\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-t)+r^2}dt; \quad 0 \le r < R$$

Teorema

Toda función continua $u :\to \mathbb{R}$ con la propiedad de la media es armónica.

Convergencia de sucesiones de funciones armónicas

Teorema

Si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \to \mathbb{R}$ también es armónica.

Convergencia de sucesiones de funciones armónicas

Teorema

Si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \to \mathbb{R}$ también es armónica.

Lema: Desigualdades de Harnack

Si $u : \overline{D(a,R)} \to [0+\infty)$ es una función continua y armónica en $D(a,R)$, para cada $r \in (0,R)$ y cada $\alpha \in [0,2\pi]$ se verifica

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\alpha}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a) \qquad (3)$$

Convergencia de sucesiones de funciones armónicas

Teorema

Si una sucesión de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ converge uniformemente sobre compactos, la función límite $u : \Omega \to \mathbb{R}$ también es armónica.

Lema: Desigualdades de Harnack

Si $u : \overline{D(a,R)} \to [0+\infty)$ es una función continua y armónica en $D(a,R)$, para cada $r \in (0,R)$ y cada $\alpha \in [0,2\pi]$ se verifica

$$\frac{R-r}{R+r}u(a) \leq u(a+re^{i\alpha}) \leq \frac{R+r}{R-r}u(a) \qquad (3)$$

Teorema

Para una sucesión creciente de funciones armónicas $u_n \in A(\Omega)$ en un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se cumple una de las dos alternativas siguientes:

i) $\lim_n u_n(z) = u(z) < +\infty$ para todo $z \in \Omega$.

ii) $\lim_n u_n(z) = +\infty$ para todo $z \in \Omega$.

En ambos casos la convergencia es uniforme sobre compactos. Cuando se cumple i), la función límite $u(z) = \lim_n u_n(z)$ es armónica